FS-1112: SEGUNDO PARCIAL

Universidad Simón Bolívar

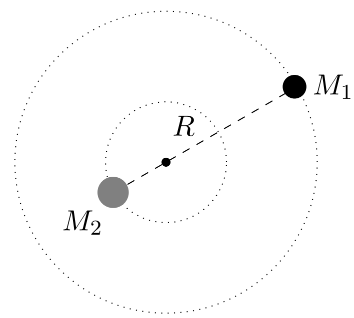
Enero-Marzo 2017

Sartenejas, 01 de marzo de 2017

Nombre:____. Carnet:____________________. Sección:________.

Parte I: Selección simple (14 puntos). A continuación se presentan 7 planteamientos de selección simple con un valor de 2 puntos cada uno. Marque con una X la opción que considere correcta de cada planteamiento. Justifique cada una de las respuestas que haya escogido. Una opción marcada sin justificación será considerada como incorrecta. Cada planteamiento tiene una única respuesta correcta. Si marca más de una opción por planteamiento, será considerado como respuesta incorrecta. No hay factor de corrección.

Dos planetas M_1 y $M_2 = 7M_1$, orbitan, uno alrededor del otro, en trayectorias circulares bajo la acción de su atracción gravitatoria. Es conocido que la frecuencia de revolución de M_1 es f_1. La distancia que separa al centro de ambos planetas vale R. El sistema se encuentra completamente aislado y el centro de masa del mismo se encuentra en reposo. Ver figura adjunta. Utilice esta información para responder los siguientes dos planteamientos:

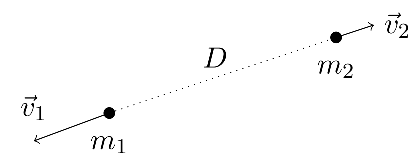


1. (2 pts.) La frecuencia de rotación de M_2 en su órbita es:
   (X) f_1
   ( ) $7f_1$
   ( ) $\frac{1}{7}f_1$
   ( ) $8f_1$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

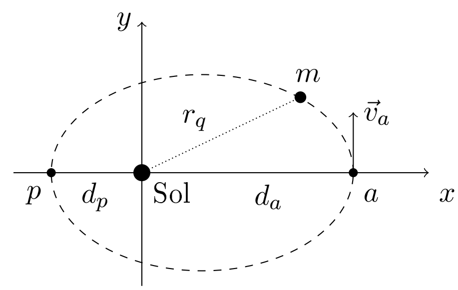
2. (2 pts.) Suponga que T_2 es el periodo de la órbita de M_2. La rapidez de M_2 es:
   ( ) $14\pi \frac{R}{T_2}$
   (X) $\frac{\pi}{4} \frac{R}{T_2}$
   ( ) $\frac{2\pi}{7} \frac{R}{T_2}$
   ( ) $\frac{\pi}{7} \frac{R}{T_2}$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

3. (2 pts.) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
   ( ) $\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}$ y $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ garantizan que un rígido se encuentre estático.
   (X) Un rígido que se encuentre estático tiene velocidad angular nula vista en tierra.
   ( ) Si el centro de masa de un rígido no se mueve respecto a tierra es porque el rígido se encuentra estático.
   ( ) Para un rígido que se encuentra estático, el centro de masa no se mueve.
   ( ) Todas las anteriores son ciertas.

4. (2 pts.) Dos partículas de masa m_1 y $m_2 = 3m_1$ se encuentran inicialmente a una distancia D, alejándose con una rapidez relativa $v_o = \sqrt{8\frac{Gm_1}{D}}$. Vea la figura adjunta. ¿Qué rapidez relativa tendrán cuando se encuentren separadas a una distancia $2D$?
( ) 0
( ) $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{Gm_1}{D}}$
( ) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}$
(X) $2\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}$
( ) Ninguna de las anteriores.



Un cometa de masa m orbita alrededor del Sol, masa $M_S >> m$, en una trayectoria elíptica cuya relación entre las distancias del afelio (a) y el perihelio (p) medidas desde el Sol es $d_a = 4d_p$. La velocidad del cometa en el afelio $\vec{v}_a$ es conocida. Vea la figura. Con esta información, responda los dos siguientes planteamientos:



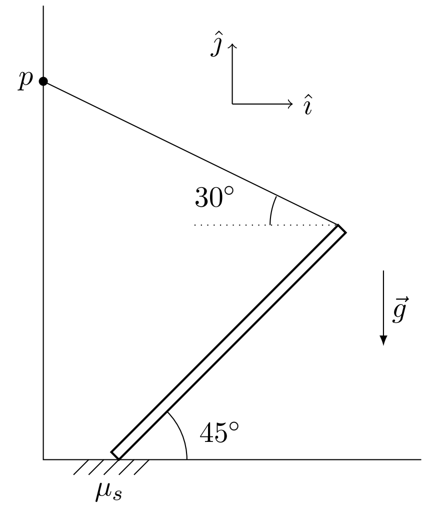
5. (2 pts.) La velocidad del cometa en el perihelio es:
( ) $-\frac{5}{4}\vec{v}_a$
( ) $\frac{1}{4}\vec{v}_a$
(X) $-4\vec{v}_a$
( ) $4\vec{v}_a$
( ) Ninguna de las anteriores.

6. (2 pts.) En la figura se muestra a m cuando se encuentra a una distancia $r_q = 2d_p$. La rapidez de m cuando se encuentra en dicho punto es:
(X) $\sqrt{v_a^2 + \frac{1}{2}\frac{GM_s}{d_p}}$
( ) $2\,v_a$
( ) $\frac{1}{2}\,v_a$
( ) $\sqrt{v_a^2 - \frac{GM_s}{d_p}}$
( ) Ninguna de las anteriores.

7. (2 pts.) Dos satélites artificiales de masas m_1 y $m_2 = 9m_1$, rotan alrededor de la Tierra en órbitas circulares con radios R_1 y $R_2 = 16R_1$, respectivamente. La relación entre la rapidez v_1 de m_1 y la de la rapidez v_2 de m_2 en sus órbitas es:
(X) $v_1 = 4\,v_2$
( ) $v_1 = \frac{27}{4}\,v_2$
( ) $v_1 = \frac{1}{4}\,v_2$
( ) $v_1 = 108\,v_2$
( ) Ninguna de las anteriores.

Parte II: Problema de desarrollo (11 puntos). A continuación se presenta un problema que debe desarrollar. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible.

8. Una barra de masa M y longitud L se encuentra inclinada a 45° sobre la horizontal, con el extremo inferior apoyado sobre el suelo y el extremo superior atado a una cuerda conectada a la pared en el punto p. La cuerda se encuentra tensa y forma 30° con la horizontal. Observe la figura adjunta. El sistema se mantiene completamente estático. Existe fricción entre el suelo y la barra; el coeficiente de roce asociado es $\mu_s = \frac{4}{5}$. Calcule:



   (a) (4 pts.) El módulo de la tensión de la cuerda.

   (b) (3 pts.) La fuerza normal que ejerce el suelo sobre la barra.

   (c) (4 pts.) La fricción $\vec{f}_r$ ejercida por el suelo sobre la barra.

Respuestas:

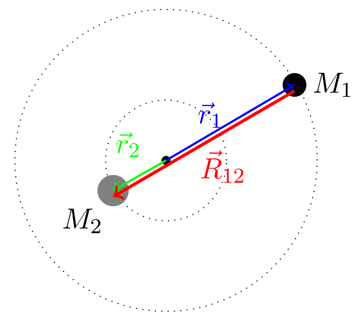
$$T = \frac{Mg}{1+\sqrt{3}} \qquad N = Mg\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}\right) \qquad \vec{f}_r = \frac{\sqrt{3}Mg}{2(1+\sqrt{3})}\hat{\imath}$$

Explicaciones

1. Obligatoriamente ambos planetas deben barrer el mismo ángulo en la misma cantidad de tiempo; es decir, deben tener iguales ω, pues de lo contrario ya el centro de masa no estaría en la línea que los une, contradiciendo el hecho de que nos dicen que no hay fuerzas externas y que el centro de masa está en reposo. Como $f = \frac{\omega}{2\pi}$ y $\omega_1 = \omega_2$, $\boxed{f_1 = f_2}$.

---

2. Recordemos que $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{v}{r}} \Rightarrow v = \dfrac{2\pi r}{T}$. Por lo tanto, debemos hallar el radio de órbita del planeta.



Si consideramos a $\vec{R}_{12}$ como el vector que va de M_1 a M_2, de magnitud R, tenemos que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{R}_{12}$ (ver figura a la derecha).

Además, tomando el centro de masa como el origen, tenemos que

$$\vec{r}_{CM} = \vec{0} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1 + M_2} \Rightarrow M_1\vec{r}_1 = -M_2\vec{r}_2 \Rightarrow M_1(\vec{r}_2 - \vec{R}_{12}) = -7M_1\vec{r}_2$$
$$\Rightarrow \vec{r}_2 = \tfrac{1}{8}\vec{R}_{12}$$

Como $||\vec{R}_{12}|| = R$, entonces $||\vec{r}_2|| = \frac{1}{8}||\vec{R}_{12}|| = \frac{1}{8}R$. Dado que ya tenemos el radio de órbita, podemos hallar la rapidez:

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} = \frac{2\pi\frac{1}{8}R}{T_2} \Longrightarrow \boxed{v_2 = \frac{\pi}{4}\,\frac{R}{T_2}}$$

---

3. Recordemos que un cuerpo debe tener $\sum\vec{\tau}_{ext} = 0, \sum\vec{F}_{ext} = 0$, y además $\vec{v} = 0$ y $\vec{\omega} = 0$ **respecto a tierra** para que esté estático. La única afirmación que no viola al menos una de las cuatro condiciones es que $\boxed{\text{la velocidad angular respecto a la tierra debe ser 0}}$.

---

4. Como se trabaja con la rapidez relativa de dos partículas que ejercen fuerzas centrales la una sobre la otra, podemos usar la masa reducida, $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, para simplificar el problema. La energía se conserva, entonces:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \Longrightarrow \frac{1}{2}\mu v_o^2 - G\frac{m_1m_2}{D} = \frac{1}{2}\mu v_f^2 - G\frac{m_1m_2}{2D} \Longrightarrow \boxed{v_f = 2\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}}$$

---

5. El momento angular se conserva, por lo tanto:

$$L_a = L_p \Longrightarrow d_pmv_p = 4d_pmv_a \Longrightarrow v_p = 4v_a$$

Sin embargo, eso nos permite hallar la magnitud solamente. Como $\vec{v}_p$ apunta en la dirección opuesta de $\vec{v}_a$, tenemos que $\boxed{\vec{v}_p = -4\vec{v}_a}$.

---

6. La energía se conserva, por ende:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{mM_S}{4d_p} = \frac{1}{2}mv_q^2 - G\frac{mM_S}{2d_p} \Longrightarrow \boxed{v_q = \sqrt{v_a^2 + \frac{1}{2}\frac{GM_S}{d_p}}}$$

7. Hallamos una fórmula general para la rapidez usando la segunda ley de Newton:

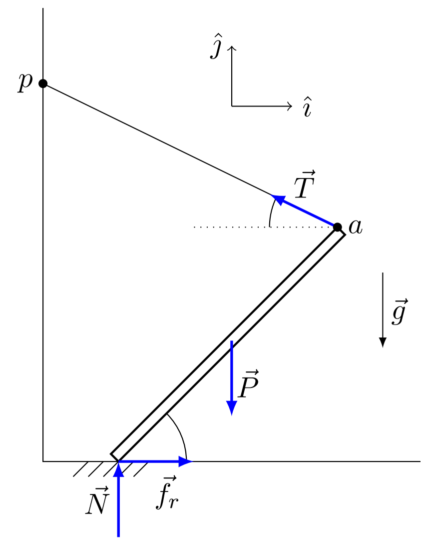
$$G\frac{mM_t}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_t}{R}}$$

Entonces $v_1 = \sqrt{\frac{GM_t}{R_1}}$ y $v_2 = \sqrt{\frac{GM_t}{16R_1}}$. Si las dividimos obtenemos la relación:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{GM_t}{R_1}}}{\sqrt{\frac{GM_t}{16R_1}}} \Longrightarrow \boxed{v_1 = 4v_2}$$

---

8. A la derecha está el diagrama de fuerzas de la figura. Asumiremos que la dirección de la fricción es hacia la derecha, pero las ecuaciones nos dirán si es en esa o en la otra dirección. Las ecuaciones de equilibrio, tomando el torque respecto al punto a, son:



$$\sum F_y = T\,\text{sen}\,30 - P + N = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_x = f_r - T\cos 30 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \tau^a = P\frac{L}{2}\cos 45 - NL\cos 45 + f_r L\,\text{sen}\,45 = 0 \qquad (3)$$

(a) De (2) tenemos que :

$$f_r = T\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}T \qquad (4)$$

Simplificando (3) y substituyendo f_r obtenemos:

$$\frac{1}{2}Mg - N + \frac{\sqrt{3}}{2}T = 0 \qquad (5)$$

Sumando (5) con (1), resulta:

$$\frac{1}{2}Mg - N + \frac{\sqrt{3}}{2}T + \frac{1}{2}T - Mg + N = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{T = \frac{Mg}{1+\sqrt{3}}}$$

(b) Sustituyendo T en (1), tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{Mg}{(1+\sqrt{3})} - Mg + N = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{N = Mg\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}\right)}$$

(c) Sustituyendo T en (4):

$$\boxed{f_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{Mg}{1+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}Mg}{2(1+\sqrt{3})}}$$

Como la fricción es positiva, entonces sí apunta hacia la derecha, como asumimos inicialmente, es decir, $\vec{f_r} = f_r\hat{\imath}$.

Este parcial fue suministrado por el Prof. Kevin Ng y resuelto por Jean F. Gómez (15-10581) con asistencia del Prof. Ng para GUIAS USB